Objetivos a cubrir **Código : MAT-CDI.6**

- Teorema del valor intermedio.
- Límite del cociente incremental.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 *: Dado que* $f(x) = x^5 + 2x - 7$. *Demuestre que hay un número* c, *tal que* $f(c) = 50$.

Solución : Observe que la función f es continua en todo su dominio, ya que, f es una función polinómica.

Consideremos el intervalo $[2, 3]$, como

$$f(2) = (2)^5 + 2(2) - 7 = 29, \qquad \text{y} \qquad f(3) = (3)^5 + 2(3) - 7 = 242$$

y se cumple que

$$f(2) = 29 < 50 < 242 = f(3),$$

por el teorema del valor intermedio, existe un valor c en el intervalo $[2, 3]$, por lo tanto, en todo $\mathbb{R}$, tal que,

$$f(c) = 50.$$

★

Ejemplo 2 *: Demuestre que la ecuación* $2x^7 = 1 - x$ *tiene una solución en* $[0, 1]$.

Solución : Demostrar que la ecuación $2x^7 = 1 - x$ tiene una solución en $[0, 1]$, es equivalente a demostrar que

$$2x^7 - 1 + x = 0$$

en $[0, 1]$, es decir, debemos encontrar la(s) raíz(ces) de la ecuación en dicho intervalo.

Consideremos la función

$$f(x) = 2x^7 - 1 + x$$

así, debemos demostrar que existe, al menos, un valor c en $[0, 1]$, tal que, $f(c) = 0$.

Observemos que la función f es continua en $[0, 1]$, ya que, f es una función polinómica, además

$$f(0) = 2(0)^7 - 1 + (0) = -1, \qquad \text{y} \qquad f(1) = 2(1)^7 - 1 + (1) = 2,$$

así,

$$f(0) = -1 < 0 < 2 = f(1),$$

por el teorema del valor intermedio, existe un valor c en el intervalo $[0, 1]$, tal que, $f(c) = 0$, luego, la ecuación

$$2x^7 = 1 - x \quad \text{tiene una solución en} \quad [0, 1].$$

★

Ejemplo 3 *: Calcular el siguiente límite,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si es que existe, para la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Solución : Tenemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}.$$

Calculamos el límite, el cual es una indeterminación $\dfrac{0}{0}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)}{h}\frac{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+h)^3}-\sqrt[3]{x^3}}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+(0))^2}+\sqrt[3]{x+(0)}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},
\end{aligned}$$

luego,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

★

Ejemplo 4 *: Calcular el siguiente límite,*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

si es que existe, para la función

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$$

Solución : Tenemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2(x+h)+3}{(x+h)-1}-\dfrac{2x+3}{x-1}}{h}.$$

Calculamos el límite, el cual es una indeterminación $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2(x+h)+3}{(x+h)-1}-\dfrac{2x+3}{x-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(x-1)(2x+2h+3)-(x+h-1)(2x+3)}{(x+h-1)(x-1)}}{h}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2(x+h)+3}{(x+h)-1}-\dfrac{2x+3}{x-1}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x-1)(2x+2h+3)-(x+h-1)(2x+3)}{h(x+h-1)(x-1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2+2hx+3x-2x-2h-3-\left(2x^2+3x+2xh+3h-2x-3\right)}{h(x+h-1)(x-1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2+2hx+3x-2x-2h-3-2x^2-3x-2xh-3h+2x+3}{h(x+h-1)(x-1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2h-3h}{h(x+h-1)(x-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-5h}{h(x+h-1)(x-1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-5}{(x+h-1)(x-1)} = -\frac{5}{(x+(0)-1)(x-1)}\\
&= -\frac{5}{(x-1)(x-1)} = -\frac{5}{(x-1)^2},
\end{aligned}
$$

luego,

$$
\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2(x+h)+3}{(x+h)-1}-\dfrac{2x+3}{x-1}}{h} = -\frac{5}{(x-1)^2}.
$$

★

Ejemplo 5 *: Calcular el siguiente límite,*

$$
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}
$$

si es que existe, para la función

$$
f(x)=\operatorname{sen}(2x)
$$

Solución : Tenemos que

$$
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2(x+h))-\operatorname{sen}(2x)}{h}.
$$

Calculamos el límite, el cual es una indeterminación $\dfrac{0}{0}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2(x+h))-\operatorname{sen}(2x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x+2h)-\operatorname{sen}(2x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)\cos(2h)+\cos(2x)\operatorname{sen}(2h)-\operatorname{sen}(2x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[\cos(2h)-1]\operatorname{sen}(2x)+\cos(2x)\operatorname{sen}(2h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[\cos(2h)-1]\operatorname{sen}(2x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\cos(2x)\operatorname{sen}(2h)}{h}\\
&= \operatorname{sen}(2x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(2h)-1}{h}+\cos(2x)\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{h},
\end{aligned}
$$

donde,

$$
\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(2h)}{2h},
$$

haciendo el cambio de variable

$$u = 2h, \qquad \Longrightarrow \qquad \text{si} \quad h \to 0 \quad \text{entonces} \quad u \to 2(0) = 0$$

obtenemos,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(2h)}{2h} = 2\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 2(1) = 2,$$

mientras que,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(2h) - 1}{h} = \frac{0}{0} \qquad \longleftarrow \qquad \text{Indeterminado}$$

aplicamos conjugada trigonométrica

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(2h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos(2h)-1)}{h}\frac{(\cos(2h)+1)}{(\cos(2h)+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2(2h)-1}{h(\cos(2h)+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2(2h)}{h(\cos(2h)+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(2h)}{h}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{\cos(2h)+1} \stackrel{?}{=} -\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2h)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2h)}{\cos(2h)+1}$$

como

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(2h)}{2h} = 2\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 2(1) = 2,$$

haciendo el cambio de variable,

$$u = 2h, \qquad \Longrightarrow \qquad \text{si} \quad h \to 0 \quad \text{entonces} \quad u \to 2(0) = 0$$

y

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2h)}{\cos(2h)+1} = \frac{\operatorname{sen}(2(0))}{\cos(2(0))+1} = \frac{\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)+1} = \frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0,$$

entonces,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(2h)-1}{h} = -(2)(0) = 0,$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2(x+h)) - \operatorname{sen}(2x)}{h} = (0)\ \operatorname{sen}(2x) + (2)\ \cos(2x) = 2\cos(2x),$$

luego

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2(x+h)) - \operatorname{sen}(2x)}{h} = 2\cos(2x)$$

★

Ejercicios

1. Verifique el teorema del valor intermedio para f en el intervalo dado. Encuentre un valor c en el intervalo para el valor indicado de N.

Función	Intervalo	N	Función	Intervalo	N
$f(x) = x^2 - 2x,$	$[1,5];$	8	$f(x) = x^3 - 2x + 1,$	$[-2,2];$	1
$f(x) = \dfrac{10}{x^2+1},$	$[0,1];$	8	$f(x) = x^2 + x + 1,$	$[-2,3];$	6

2. Dado que f es continua en $[a,b]$ y $f(a) = 5$ y $f(b) = 20$. Demuestre que hay un número c en $[a,b]$, tal que $f(c) = 10$.

3. Dado que $f(x) = x^5 + 2x - 7$. Demuestre que hay un número c, tal que $f(c) = 50$.

4. Dado que $f(x) = x^5 + x - 1$. Demuestre que hay un número c, tal que $f(c) = 0$.
5. Dado que f y g son continuas en $[a, b]$, tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$. Demuestre que hay un número c en (a, b), tal que $f(c) = g(c)$.
6. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $x^3 + 3x - 2 = 0$ tiene una solución real entre 0 y 1.
7. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $t^3 \cos t + 6 \operatorname{sen}^5 t - 3 = 0$ tiene una solución real entre 0 y 2π.
8. Demuestre que la ecuación $2x^7 = 1 - x$ tiene una solución en $[0, 1]$.
9. Demuestre que la ecuación $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ tiene al menos una soiución real.
10. Demuestre que la ecuación
$$\frac{x^2+1}{x+3} + \frac{x^4+1}{x-4} = 0$$
tiene una solución en el intervalo $(-3, 4)$.
11. Calcular el siguiente límite, si es que existe,
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
para las siguientes funciones

1. $f(x) = k$ 2. $f(x) = x$ 3. $f(x) = x^2$ 4. $f(x) = x^3$ 5. $f(x) = x^4$

6. $f(x) = x^{-1}$ 7. $f(x) = x^{-2}$ 8. $f(x) = x^{-3}$ 9. $f(x) = \sqrt{x}$ 10. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

11. $f(x) = \sqrt[4]{x}$ 12. $f(x) = \operatorname{sen} x$ 13. $f(x) = \cos x$ 14. $f(x) = \tan x$

15. $f(x) = \sec x$ 16. $f(x) = \csc x$ 17. $f(x) = \cot x$ 18. $f(x) = -4$

19. $f(x) = 2$ 20. $f(x) = -3x$ 21. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 22. $f(x) = 2x^2$ 23. $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

24. $f(x) = 5x - 3$ 25. $f(x) = 7 - 4x$ 26. $f(x) = x^2 - 1$ 27. $f(x) = 3 - 2x^2$

28. $f(x) = 4x^2 - 3x$ 29. $f(x) = \dfrac{x}{3} - 5x^2$ 30. $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$ 31. $f(x) = \sqrt{2x+1}$

32. $f(x) = \sqrt[3]{5x-7}$ 33. $f(x) = \dfrac{1}{4-x}$ 34. $f(x) = \dfrac{2}{3x+1}$ 35. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

36. $f(x) = \dfrac{2+x}{x^2-x}$ 37. $f(x) = \dfrac{6}{x^2+1}$ 38. $f(x) = \dfrac{2x-1}{1-x}$ 39. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

40. $f(x) = \dfrac{-2}{4-x^2}$ 41. $f(x) = \dfrac{x}{1-2x}$ 42. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 43. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$

44. $f(x) = \dfrac{4}{3x} - \operatorname{sen} x$ 45. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ 46. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ 47. $f(x) = \operatorname{sen} kx$

48. $f(x) = \cos 2x$ 49. $f(x) = \cos 3x$ 50. $f(x) = \cos kx$ 51. $f(x) = \sec 2x$

52. $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$ 53. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ 54. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-x}$ 55. $f(x) = \csc 3x$

56. $f(x) = \cot 3x$ 57. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x}+1}$ 58. $f(x) = \cos x^2$ 59. $f(x) = \tan 3x^2$

60. $f(x) = \sqrt{2x + x^2 - 3}$

12. Demuestre que el límite
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
no existe cuando $x = 0$ y la función es $f(x) = |x|$.

13. Calcule
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$
para $f(x) = x\,|x|$.

Respuestas: Ejercicios

11.1. 0; 11.2. 1; 11.3. $2x$; 11.4. $3x^2$; 11.5. $4x^3$; 11.6. $-\frac{1}{x^2}$; 11.7. $-\frac{2}{x^3}$; 11.8. $-\frac{3}{x^4}$; 11.9. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

11.10. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 11.11. $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$; 11.12. $\cos x$; 11.13. $-\operatorname{sen} x$; 11.14. $\sec^2 x$; 11.15. $\sec x \tan x$; 11.16. $-\csc x \cot x$;

11.17. $-\csc^2 x$; 11.18. 0; 11.19. 0; 11.20. -3; 11.21. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 11.22. $4x$; 11.23. $\frac{-5}{2x^{\frac{3}{2}}}$; 11.24. 5;

11.25. -4; 11.26. $2x$; 11.27. $-4x$; 11.28. $8x-3$; 11.29. $-10x+\frac{1}{3}$; 11.30. $-\frac{2}{x\sqrt[3]{x}}$; 11.31. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$;

11.32. $\frac{5}{3\sqrt[3]{(5x-7)^2}}$; 11.33. $\frac{1}{(4-x)^2}$; 11.34. $-\frac{6}{(3x+1)^2}$; 11.35. $-\frac{2}{(x-1)^2}$; 11.36. $\frac{2-x^2-4x}{(x^2-x)^2}$; 11.37. $-\frac{12x}{(x^2+1)^2}$;

11.38. $(x-1)^{-2}$; 11.39. $\frac{1}{x}\cos x - \frac{1}{x^2}\operatorname{sen} x$; 11.40. $-\frac{4x}{(4-x^2)^2}$; 11.41. $\frac{1}{(2x-1)^2}$; 11.42. $-\frac{1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$;

11.43. $-\frac{x^2+3}{(x^2-3)^2}$; 11.44. $-\cos x - \frac{4}{3x^2}$; 11.45. $2\cos 2x$; 11.46. $3\cos 3x$; 11.47. $k\cos kx$; 11.48. $-2\operatorname{sen} 2x$;

11.49. $-3\operatorname{sen} 3x$; 11.50. $-k\operatorname{sen} kx$; 11.51. $2\sec 2x \tan 2x$; 11.52. $\frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$; 11.53. $\operatorname{sen} 2x$; 11.54. $\frac{\cos x}{1-x} + \frac{\operatorname{sen} x}{(1-x)^2}$;

11.55. $-3\csc 3x \cot 3x$; 11.56. $-3\csc^2 3x$; 11.57. $\frac{1}{3(x-1)}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{(\sqrt{x}+1)^2}$; 11.58. $-2x\operatorname{sen} x^2$;

11.59. $6x\sec^2 3x^2$; 11.60. $\frac{x+1}{\sqrt{2x+x^2-3}}$; 13. 0;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.